

doi: 10.3969/j.issn.1005-7854.2021.05.004

Verhulst 模型在滑坡预测预报中的应用研究

黄精涛 李金轩

(东华理工大学 水资源与环境工程学院, 南昌 330013)

摘 要: Verhulst(费尔哈斯)模型自被提出后,被广泛应用到滑坡预测预报中。传统 Verhulst 模型和 Verhulst 反函数模型在国内外众多知名的滑坡数据中得以验证,二者相比,传统 Verhulst 模型预测效果更好。但随着研究的深入,发现两种模型都存在误报的现象,进而被不断改进创新。Verhulst 模型在初始值、背景值、判据、运算方法等方面得到优化改进,Verhulst 反函数模型仅在初始条件和计算方法上做了简要优化。根据目前优化改进的模型,灰色马尔科夫 Verhulst 动态模型在 Verhulst 模型中预测精度最高,适用性最强。而 Verhulst 反函数模型的改进研究发展相对较少,其适用性和预测预报精度有待考虑。

关键词: 滑坡; 预测预报; Verhulst 模型; Verhulst 反函数模型; 改进

中图分类号: P642.22

文献标志码: A

文章编号: 1005-7854(2021)05-0018-06

Application of Verhulst model in landslides prediction

HUANG Jing-tao LI Jin-xuan

(School of Water Resources and Environmental Engineering, East China Institute of Technology, Nanchang 330013, China)

Abstract: Verhulst model has been widely used in landslide forecasting since it was proposed. The traditional Verhulst model and Verhulst inverse function model have been verified in many well-known landslide data at home and abroad. Comparatively, the prediction effect of the traditional Verhulst model is better. However, with the deepening of the research, it is found that both of the two traditional models have false positives, which are improved and innovated continuously. The Verhulst model is optimized and improved in original value, background value, criterion, operation method and other aspects, while the Verhulst inverse function model is simply optimized in initial conditions and calculation method. According to the current optimized and improved models, the gray Markov Verhulst dynamic model has the highest prediction accuracy and the strongest applicability in the Verhulst model. However, the improvement of Verhulst inverse function model is relatively undeveloped, and its applicability and prediction accuracy need to be considered.

Key words: landslides; forecast; Verhulst model; Verhulst inverse function model; improvement

滑坡预测预报的研究和应用,一直都是灾害研究领域的重点^[1],也是国内外研究的热点,对滑坡开展合理有效的预测预报也是一直困扰着诸多专家学者的一大难题。经过国内外专家学者多年的精心研究,在滑坡的预测预报方面取得了不错的成效,滑坡空间的预测预报从早期的灾害前兆预报、安全

系数法到现今的多方法综合预报预测,时间的预测预报从斋藤迪孝模型的引入到现在的 5G 技术的综合应用等,都在生产实践中得到充分应用,其模型和方法的改革创新也步入了新时代。

在滑坡的预测预报研究中,常见的预测预报模型和方法有斋藤模型、福囿(Fukuzono)模型、苏爱军模型、Verhulst 模型、BP 神经网络法、灰色(G, M)理论、信息模型法、灾变模型预测法、模糊综合评判法、线性回归模型法、聚类分析模型法、多因子定量分析模型法、非线性动力学模型预

收稿日期:2020-11-02

第一作者:黄精涛,硕士研究生,主要研究方向为地质灾害。

E-mail: 1207486781@qq.com

通信作者:李金轩,教授; E-mail: 932890996@qq.com

测法、多参数预报法、黄金分割法及 Pearl 模型法等。但在诸多的研究方法和模型中,研究应用最多的当属灰色(G, M)理论和 Verhulst 模型。本文基于 Verhulst 模型在滑坡预测预报中的研究应用,探讨 Verhulst 模型的发展改进,以期为该模型的应用以及进一步的优化提供帮助。

1 传统 Verhulst 模型

1.1 Verhulst 模型基本原理

Verhulst 模型,也叫费尔哈斯模型、V 氏模型,是 1987 年德国生物学家 Verhulst 提出的一种生物生长模型。我国学者晏同珍认为滑坡的动态演变符合位移—时间的 S 型增长曲线,最早将 Verhulst 模型引入滑坡预测预报研究领域。Verhulst 模型的表达式如下:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \quad (1)$$

式中: a 、 b 为待定系数,可通过最小二乘法原理和求极值的方法求解, x 表示滑坡滑动的位移量, t 表示滑坡滑动时间的预测值,求解方程得:

$$x(t) = \frac{a/b}{1 + \left[\frac{a}{b} \frac{1}{x_0} - 1 \right] e^{a(t-t_0)}} \quad (2)$$

式中: x_0 、 t_0 表示初始位移值和时间,当 $x = a/2b$ 时, dx/dt 出现极大值,即此时的滑坡滑动时间 t_r 为滑坡发生时间的预测值,可由式 3 求解得到:

$$t_r = t_0 - \frac{1}{a} \ln \left(\frac{bx_0}{a - bx_0} \right) \quad (3)$$

1.2 Verhulst 模型在滑坡预测预报中的应用

在 Verhulst 模型的应用中,诸多学者都基于重大滑坡实例进行了短期预报和临滑预报验证,结果表明 Verhulst 模型预测效果良好,精度较高。晏同珍最早将 Verhulst 模型应用到滑坡预测预报中,基于此法对长江新滩滑坡、甘肃黄龙西村滑坡以及意大利 Vaiont 滑坡数据进行验证研究,其预测检验结果较为成功;殷坤龙等^[2]也用 Verhulst 模型对鸡鸣寺滑坡进行了预报验证,结果显示其精度极高;温文等^[3]利用 Verhulst 模型对黄茨滑坡进行时间预测,其预测效果也较好。此外,有不少学者对 Verhulst 预测模型进行了创新,推出 Verhulst 预测模型程序化应用。他们使用计算机 VBA 语言对 Excel 进行二次开发,在一定程度上提高了数据操作和分析的效率。如:曾

程^[4]、程江涛等^[5]以及覃秋雅等^[6]基于 Verhulst 模型,使用 Excel 内嵌的 VBA 语言,对 1995 年甘肃省兰州市的黄茨滑坡进行验证,并且曾程、程江涛等还基于灰色(1, 1)模型进行了对比分析,其对比结果证实了 Verhulst 模型在滑坡预测预报中具有较好的适用性,依托此法对软件的开发改进是可行的。

以往研究中,原始 Verhulst 模型是以速度达到最大值时刻作为滑坡滑动的预报判据,根据陶干强等^[7]的研究,Verhulst 预测模型变形位移与速度和时间的关系如图 1 所示。

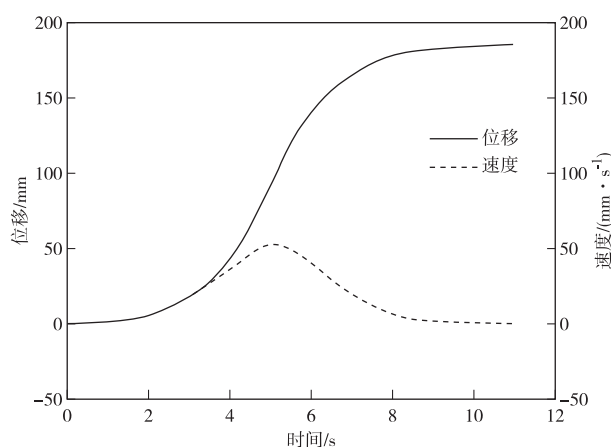


图 1 Verhulst 预测模型位移和速度随时间的变化曲线

Fig. 1 Curves of displacement and velocity of Verhulst prediction model over time

由图 1 可以看出,随着时间的延长,位移和速度不断增大,当速度达到最大时,并没有出现位移最大值。所以,单纯的由速度变化情况或以速度达到最大值来预测预报滑坡发生的时间是片面的且与客观事实不符合。为此,一大批研究人员对原始 Verhulst 模型进行了改进和创新。

2 Verhulst 模型的改进

2.1 Verhulst 模型的改进

随着 Verhulst 模型在滑坡预测预报中的广泛应用,专家学者们对滑坡预测预报研究也越发深入,发现传统的 Verhulst 模型在某些滑坡预测预报中存在误报的现象,进而对原始 Verhulst 模型进行了改进和创新。戴文战等^[8]对 Verhulst 模型产生误差的原因进行了分析,并对模型的背景值进行重构优化,提出了结构参数的优化算法,进一步提高了 Verhulst 模型的精度。并且戴文战还将改进后的 Verhulst 模型与原始 Verhulst 模型应用到

实例中进行对比验证,结果显示改进后的 Verhulst 模型应用范围和预测精度方面都要优于传统 Verhulst 模型。陈露^[9]首先利用最小二乘原理对模型初值进行优化,其次基于平均相对误差最小准则利用粒子群算法对模型中的参数进行优化,从而达到模型的二次改进。并且,她还建立了传统 Verhulst 模型和改进后的 Verhulst 模型对比仿真实验,结果表明改进模型 2(初值和背景值优化,并结合粒子群优化算法)的拟合精度最高,改进模型 1(初值优化)次之,传统模型误差最大。王利红等^[10]对模型进行反推改进,她假定累加序列中每一个值都为已知的初值,并将其带入模型,应用最小二乘法对每一个累加值求残差,并基于残差最小原则确定最优初值从而对模型进行优化改进,但并未对模型进行验证。为此,贺小黑等^[11]基于王利红的改进模型(已知条件的改进)进行了实例验证,并进一步对模型进行了改进(预报判据的改进),将改进后的模型对比应用到滑坡预测预报验证实例中,结果显示改进的 Verhulst 模型的预报精度明显高于原始 Verhulst 模型,而且改进模型的预报时间比原始模型的预报时间更早,并且提出了使用加速度最大判据可以起到提前预测预报的作用。LEAU 等^[12]基于背景值提出一种自适应灰色算法,并将梯形法则和辛普森 1/3 法则结合,提出了生成

序列可调的自适应灰色 Verhulst 模型,并对模型进行了验证。李志阔^[13]基于最小二乘原理对 Verhulst 模型进行初值优化,并在平均相对误差最小的准则下将模型的参数优化为线性,从而利用优化算法对参数进行优化。邓洪高等^[14]基于传统 Verhulst 模型预测精度较低的问题,在灰色马尔科夫 Verhulst 模型的基础上再次进行改进,最终提出了灰色马尔科夫 Verhulst 动态模型,并结合新滩滑坡数据对模型进行分析验证。结果表明,灰色马尔科夫 Verhulst 动态模型综合了原始 Verhulst 模型和灰色马尔科夫 Verhulst 模型的优点,且预测预报精度远远优于另外两种模型。

2.2 Verhulst 模型改进的优越性讨论

尽管许多专家都对 Verhulst 模型进行了改进,但仅有很少专家将改进后的模型用于滑坡实例验证。戴文战、陈露以及 LEAU 等虽然对模型进行了验证,但并未应用滑坡实例。本文主要讨论模型对滑坡预测预报的研究,所以在此仅针对应用到滑坡实例中的模型进行优越性讨论。基于贺小黑和邓洪高改进后的 Verhulst 模型,利用文献 [15] 中新滩滑坡 B3 点的监测数据(详见表 1),对两种改进模型进行对比分析,探讨其在滑坡预测预报中的优越性。

表 1 新滩滑坡 B3 点位移监测值统计

Table 1 Displacements of B3 point of Xintan landslide

/mm

年份	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
1978	13.3	16.7	20.5	24.8	28.8	43.4	60.5	66.5	75.0	77.6	77.8	87.8
1979	89.4	93.3	98.2	99.7	104.4	115.5	126.4	149.9	302.0	367.0	404.5	412.7
1980	427.9	437.8	442.4	451.4	456.4	471.4	520.4	588.4	688.4	690.1	721.8	723.9
1981	731.4	739.1	747.5	762.7	775.2	784.0	788.2	791.1	817.1	819.1	824.1	832.1
1982	837.1	840.6	848.1	926.1	1 047.7	1 096.3	1 117.8	1 254.0	1 504.8	1 747.8	1 823.6	1 895.1
1983	1 995.8	2 024.5	2 056.4	2 087.6	2 119.7	2 148.5	2 277.9	2 430.0	2 582.1	2 734.2	2 886.3	3 038.1
1984	3 190.5	3 342.6	3 494.7	3 646.8	3 798.9	3 951.0	4 188.7	4 521.7	4 673.5	5 195.6	5 467.3	5 705.0
1985	5 863.3	6 012.7	6 177.2	6 304.5	6 686.2							

基于贺小黑和邓洪高改进后的模型,拟合结果如图 2 所示。从图 2 可以看出,在滑坡初始阶段(1879 年 8 月以前),4 种模型的拟合值与原始数据比较接近,但随着滑坡位移的增大,灰色马尔科夫 Verhulst 模型和传统 Verhulst 模型的拟合值逐渐偏离原始数据且越偏越远;贺小黑改进后的模型首先对数据进行平滑处理,

得到的位移时间曲线(简称平滑曲线模型)与原始数据趋势基本保持一致,很好地对滑坡数据进行了预报验证;而邓洪高改进后的灰色马尔科夫 Verhulst 动态模型拟合值与原始数据发展趋势高度保持一致,数值也十分接近,较好地进行了预报验证,也是截至目前预测精度最高的模型。

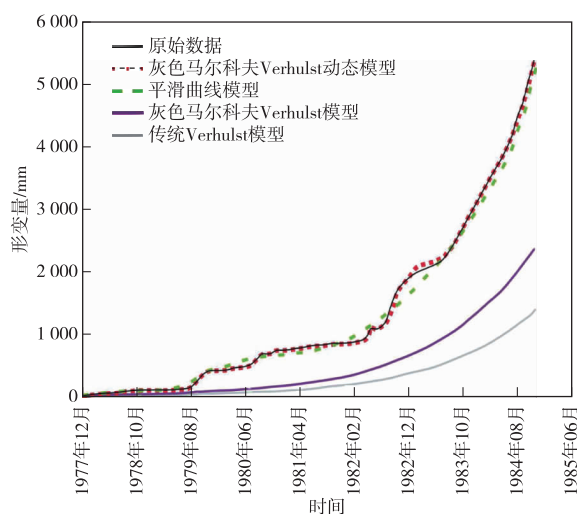


图2 新滩滑坡 B3 监测点四种模型拟合度对比图

Fig. 2 Comparison diagram of fitting effects of four models displacements of B3 point of Xintan landslide

3 Verhulst 反函数模型

3.1 Verhulst 反函数模型基本原理

李天斌等^[16]在研究中认为 Verhulst 模型的预报判断是基于相似性建立的, 缺乏理论和量化依据, 且 Verhulst 模型曲线“S”型与边坡变形破坏的典型曲线恰好相反, 两者互为反函数(特征曲线见图3), 进而提出了 Verhulst 反函数模型。其预报模型如下:

$$X^{(0)}(t) = \{X^{(0)}(1), X^{(0)}(2), X^{(0)}(3), \dots, X^{(0)}(n)\} \quad (4)$$

式中, $X^{(0)}(t)$ 为等间隔位移监测数据序列, 对其作一次累加并进行生成变换得:

$$X^{(1)}(t) = \{X^{(1)}(1), X^{(1)}(2), X^{(1)}(3), \dots, X^{(1)}(n)\} \quad (5)$$

其拟合的 Verhulst 表达式为:

$$\frac{dX^{(1)}(t)}{dt} = aX^{(1)}(t) - b[X^{(1)}(t)]^2 \quad (6)$$

求解得:

$$\hat{X}^{(1)}(t) = \frac{aX^{(0)}(1)}{bX^{(0)}(1) + [a - bX^{(0)}(1)]a^{-a(t-t_0)}} \quad (7)$$

对(7)进行反函数求解, 并进行变量互换求得 Verhulst 反函数模型如下:

$$\hat{X}^{(1)}(t) = \frac{1}{a} \ln \frac{(a - bt_0)t}{at_0 - bt_0 \cdot t} + X^{(0)}(1) \quad (8)$$

式中, a, b 为待定系数, 可根据最小二乘法原理求得, t 为时间序数。

由式8可以看出, 当滑坡的变形量 $\hat{X}^{(1)}(t)$ 趋于无穷大时, 时间趋于定值 a/b , 即滑坡预报时间: $T = a/b$ 。

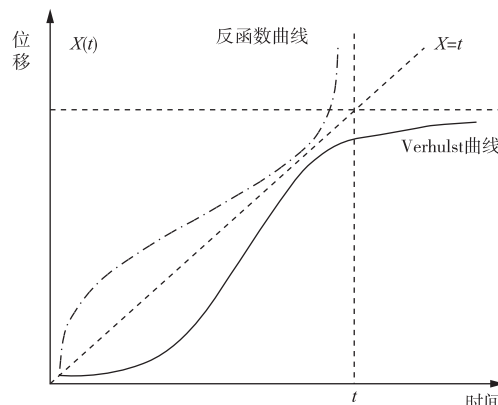


图3 Verhulst 模型及 Verhulst 反函数模型特征曲线

Fig. 3 The character curves of Verhulst model and its inverse function

3.2 Verhulst 反函数模型的应用及发展改进

Verhulst 反函数模型提出后, 逐渐被应用于滑坡的短期预报和临滑预报中。李天斌等^[16]提出 Verhulst 反函数模型后, 开展了一系列的实例验证。对三峡库区的某顺层边坡进行了长达4年的监测预报, 预报结果比实际提前10天; 其次, 基于新滩滑坡 A3 点监测数据, 进行为期1年的预报验证, 得到的预测结果比实际提前16天; 还对黄河龙西滑坡开展预测预报, 结果比实际提前8天。徐林生^[17]采用 Verhulst 反函数模型对湖北恩施某公路隧道和新桐公路隧道口围岩变形的突发失稳时间进行预报, 结果表明预测精度都较高。龙万学等^[18]基于 Verhulst 反函数模型, 选用鸡鸣寺滑坡、加拿大 Hogarth 滑坡等数据, 对滑坡起始预测时刻选择进行深入研究。贺小黑^[19]应用 Verhulst 反函数模型对卧龙寺和黄茨滑坡数据进行预测预报验证。

随着对 Verhulst 反函数模型的深入研究, Verhulst 反函数模型得以不断地创新改进。尹彦波等^[20]基于原始的 Verhulst 反函数模型, 建立了地压灾害 Verhulst 反函数预测模型, 并结合了 VB 编制的计算机模型, 对柿竹园多金属矿的地压灾害开展预测预报, 结果显示预测结果与工程实际吻合度较高。周中等^[21]对 Verhulst 反函数预测预报模型增加残差项, 并应用 BP 神经网络对残差序列进行二次建模分析, 建立了滑坡失稳时间预报的 Verhulst 反函数残差修正模型预测法。基于此法,

对新滩滑坡和加拿大 Hogarth 滑坡进行预测预报, 新滩预测结果比实际边坡失稳时间提前 7 天, 加拿大预测结果与实际破坏时间完全一致。贺小黑^[19]通过对原始的 Verhulst 反函数模型研究, 对初始条件理论依据等方面进行改进, 提出了非线性拟合的求解方法, 并与原始的 Verhulst 反函数模型进行对比实例验证。在卧龙寺滑坡的验证中, 改进后的模型预测结果比实际早 2 天; 在黄茨滑坡的验证中, 改进后的模型预测结果比实际早 1 天, 两者都比原始 Verhulst 反函数模型预测精度更高。

截至目前, Verhulst 反函数模型在滑坡预测预报的研究应用中相对 Verhulst 模型较少, 且改进创新的 Verhulst 反函数模型应用研究也相对较少, 其预测预报准确性和适用性不明显。

4 结论

1) 传统的 Verhulst 模型和 Verhulst 反函数模型在国内外的重大滑坡实例中都得到了较好的验证。二者相比较, Verhulst 模型在应用验证中, 适用性较强, 预测精度也较高; 而 Verhulst 反函数模型的预测预报模拟验证中, 虽然预测精度高但仅有少数预报是较实际提前的。

2) 在 Verhulst 模型的应用研究中, 文章针对原始模型的初值、背景值、判据及运算方法等进行改进研究讨论, 总结归纳改进后模型的优越性, 高度认为邓洪高等改进的灰色马尔科夫 Verhulst 动态模型是目前预测精度最为准确的 Verhulst 模型。而 Verhulst 反函数模型在滑坡的应用领域开展的研究较少, 相的改进创新的 Verhulst 反函数模型的应用研究也相对较少, 仅在计算方法、初始条件等方面进行了改进, 并且在研究中很少对同一滑坡进行验证或者对同一数据的验证切入点不一致, 其适用性和预测准确性有待进一步考虑。

3) Verhulst 反函数模型相对于 Verhulst 模型来说, 其变形破坏曲线与滑坡的矢量化曲线更接近, 并且目前的研究应用较少, 在后续的研究应用中 Verhulst 反函数模型还有很多地方值得挖掘, 其较提前的精准预测预报效果还是值得期待的。尽管目前的研究并未很好地证实这一点, 但在以后的研究中, 可以尝试从初始值、判据、优化运算方法等多方面进行拟合, 综合构建模型, 并结合人工智能, 以期更准确地对滑坡开展预测预报, 更好地达到防灾减灾的效果。

参考文献

- [1] 杨志法, 陈剑. 关于滑坡预测预报方法的思考[J]. 工程地质学报, 2004(2): 118-123.
YANG Z F, CHEN J. Thoughts on landslide prediction methods [J]. Journal of Engineering Geology, 2004(2): 118-123.
- [2] 殷坤龙, 晏同珍. 滑坡预测及相关模型[J]. 岩石力学与工程学报, 1996, 15(1): 1-8.
YIN K L, YAN T Z. Landslide prediction and correlation model[J]. Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1996, 15(1): 1-8.
- [3] 温文, 吴旭彬. Verhulst 模型在黄茨滑坡临滑预测中的应用[J]. 人民珠江, 2005(5): 38-40.
WEN W, WU X B. Application of Verhulst model in the prediction of the landslide in Huangzi landslide[J]. People's Pearl River, 2005(5): 38-40.
- [4] 曾程. 基于 Verhulst 模型的黄茨滑坡位移预测研究及其在 Excel VBA 中的实现[J]. 中国水运(理论版), 2007(6): 117-118.
ZENG C. Study on displacement prediction of Huangtz landslide based on Verhulst model and its implementation in Excel VBA [J]. China Water Transport, 2007(6): 117-118.
- [5] 程江涛, 刘莉. 基于 Verhulst 模型的滑坡位移预测研究及其程序化实现[J]. 岩土工程技术, 2008(5): 217-222.
CHENG J T, LIU L. Research on landslide displacement prediction based on Verhulst model and its programmed implementation [J]. Geotechnical Engineering, 2008(5): 217-222.
- [6] 覃秋雅, 于大鹏, 叶云林. 基于 Excel 的灰色 Verhulst 模型在滑坡预测中的应用[J]. 科协论坛(下半月), 2008(11): 78-79.
QIN Q Y, YU D P, YE Y L. Application of gray Verhulst model based on Excel in landslide prediction[J]. Science and Technology Association Forum(Second Half), 2008(11): 78-79.
- [7] 陶干强, 任凤玉, 王孝存. 灰色理论 Verhulst 模型用于滑坡预测的研究[J]. 矿业研究与开发, 2002, 22(4): 11-13.
TAO G Q, REN F Y, WANG X C. Gray theory Verhulst model for landslide prediction[J]. Mining Research and Development, 2002, 22(4): 11-13.
- [8] 戴文战, 熊伟, 杨爱萍. 灰色 Verhulst 模型的改进及其应用[J]. 化工学报, 2010, 61(8): 2097-2100.
DAI W Z, XIONG W, YANG A P. The improvement and application of grey Verhulst model[J]. Chinese

- Journal of Chemical Engineering, 2010, 61(8): 2097-2100.
- [9] 陈露. 灰色 Verhulst 模型的改进及其应用[J]. 数学的实践与认识, 2011, 41(10): 172-177.
CHEN L. Improvement and application of gray Verhulst model [J]. Mathematical Practice and Understanding, 2011, 41(10): 172-177.
- [10] 王利红, 罗明奇, 马少仙. Verhulst 模型的改进研究[J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(8): 113-116.
WANG L H, LUO M Q, MA S X. Research on improvement of Verhulst model [J]. Practice and Understanding of Mathematics, 2012, 42(8): 113-116.
- [11] 贺小黑, 王思敬, 肖锐铎, 等. Verhulst 滑坡预测预报模型的改进及其应用[J]. 岩土力学, 2013, 34(增刊 1): 355-364.
HE X H, WANG S J, XIAO R H, et al. Improvement and application of Verhulst landslide prediction model [J]. Rock and Soil Mechanics, 2013, 34(S1): 355-364.
- [12] LEAU Y B, MANICKAM S. A novel adaptive grey Verhulst model for network security situation prediction [J]. International Journal of Advanced Computer Science and Applications, 2016, 7(1): 90-95.
- [13] 李志阔. 灰色 Verhulst 模型的改进及其应用[J]. 城市建设理论研究(电子版), 2018(3): 127-128.
LI Z K. Improvement and application of gray Verhulst model [J]. Urban Construction Theory Research(Electronic Version), 2018(3): 127-128.
- [14] 邓洪高, 姚鹏远, 孙希延, 等. 灰色马尔科夫 Verhulst 动态模型在滑坡形变预测中的应用[J]. 科学技术与工程, 2019, 19(13): 50-55.
DENG H G, YAO P Y, SUN X Y, et al. Application of gray Markov Verhulst dynamic model in landslide deformation prediction [J]. Science Technology and Engineering, 2019, 19(13): 50-55.
- [15] 贺可强. 积层滑坡位移信息分析与失稳趋势判据的研究[D]. 北京: 中国科学院地质与地球物理研究所, 2003.
HE K Q. Study on the displacement information analysis and instability trend criterion of sedimentary landslide [D]. Beijing: Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, 2003.
- [16] 李天斌, 陈明东. 滑坡时间预报的费尔哈斯反函数模型法 [J]. 地质灾害与环境保护, 1996(3): 13-17, 29.
LI T B, CHEN M D. Fairhaas inverse function model for landslide time prediction [J]. Geological Hazards and Environmental Protection, 1996(3): 13-17, 29.
- [17] 徐林生. 公路隧道围岩稳定位移与突发失稳时间预报研究 [J]. 重庆交通学院学报, 2005(5): 18-20, 24.
XU L S. Research on the time forecast of surrounding rock stability displacement and sudden instability of highway tunnel [J]. Journal of Chongqing Jiaotong University, 2005(5): 18-20, 24.
- [18] 龙万学, 林剑, 许湘华, 等. Verhulst 反函数模型滑坡起始预测时刻的选择 [J]. 岩石力学与工程学报, 2008(增刊 1): 3298-3304.
LONG W X, LIN J, XU X H, et al. Selection of initial prediction time of Verhulst inverse function model for landslide [J]. Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, 27(S1): 3298-3304.
- [19] 贺小黑. Verhulst 反函数滑坡预测预报模型的改进 [J]. 华南地质与矿产, 2018, 34(4): 289-293.
HE X H. Improvement of Verhulst inverse function landslide prediction model [J]. Geology and Minerals of South China, 2008, 34(4): 289-293.
- [20] 尹彦波, 李爱兵. 基于 Verhulst 反函数预测模型的柿竹园矿地压灾害预测预报 [J]. 矿业研究与开发, 2007, 27(6): 73-74, 85.
YIN Y B, LI A B. Prediction and prediction of ground pressure disaster in Shizhuyuan mine based on Verhulst inverse function prediction model [J]. Mining Research and Development, 2007, 27(6): 73-74, 85.
- [21] 周中, 刘宝琛. 滑坡预测预报的 Verhulst 反函数残差修正模型 [J]. 中国铁道科学, 2009, 30(4): 13-18.
ZHOU Z, LIU B C. Residual error correction model of Verhulst inverse function for landslide prediction [J]. China Railway Science, 2009, 30(4): 13-18.